박황규
본회 연구위원, 서경대학교 수학과 교수

무한과 논리에 대하여 - 수학의 신학적 함축

이 글은 97.2.21~22일에 대광고등학교에서 열린 기독학문학회에서 발표되었다.

1. 들어가는 말

수학과 신학은 외견상 어떠한 공통의 관심 또는 학문적인 접촉점이 없는 것처럼 보인다. 이러한 단절의 모습은 비단 수학과 신학과의 관계에서만 발견되는 것이 아니다. 실제로 오늘날 대부분의 학문은 다른 학문에 대하여 무관심하고, '두더지'와 같이 자기 굴(영역)만을 파고 있다고 여겨진다. 역사적으로 살펴보면 학문은 종합적으로 연구되어 오다가 미분화 과정을 거쳐 많은 분과 과학으로 독립했다. 이 과정에서 사회적, 경제적 이유도 가세하여 하나의 학문은 다른 학문과의 공통점보다는 차별성이 강조되어야 했고 학문간에는 서로 배타적인 관계를 형성하게 된 것으로 보인다. 그런데 최근에 학계에서는 인문사회과학과 자연과학을 통합적으로 연

구하려는 분위기가 점차로 조성되고 있다. 과학철학이나 과학사도 그러하고 특히 인지과학의 경우 마음, 두뇌, 컴퓨터, 인간의 지적 산물 등의 영역을 총체적으로 다루기 때문에 심리학, 컴퓨터과학, 언어학, 신경과학, 수학, 철학등 많은 학문이 함께 연구에 참여하고 있다. 학문이 서로 단절되어 지식이 파편화된데 대한 반성과 통합적 시각의 필요성 그리고 개별 학문의 한계에 대한 인식 고조가 학제간 연구의 공감대를 넓힌 것이다. 학문이 보다 보편적인 것을 추구하는 것이라면 이러한 방향은 자연스러운 일이다. 그러나 학제간 통합적 연구가 또다른 배타주의로 빠지는 것은 경계해야 한다. 분과 학문이 가졌던 한계와 파편성을 상대적으로 개선했다고 해서 그것을 완전히 극복한 것은 아니기 때문이다.

한 분야에서 제기되는 새로운 개념들과 이론들은 다른 분야에서 직접적으로 혹은 변형된 형태로 사용되기도 하며 새로운 함축과 해석을 야기한다. 예컨대 '엔트로피' 라는 개념은 자연과학적 용어이지만 인문 사회분야에서도 폭넓게 사용되고 있으며, 좀 더 넓게는 진화론이라든가 상대성 이론, 불확정성원리, 불완전성정리등은 그것들의 진위에 관계없이 비단 한 분과 과학의 이론으로만 머물러 있지 않고 세계관의 변화를 초래한 것들이라고 할 수 있다. 수학에서도 19C에 비유클리드 기하학의 출현은 수학뿐만 아니라 학문 전반에 큰 충격을 주었다. 왜냐하면 사람들은 평행성공리라 불리우는 유클리드 제 5공준은 자명한 진리라고 생각했는데 직선 밖의 한 점을 지나는 평행선이 무수히 많다든가 하나도 없다고 가정해도 전혀 모순이 없는 기하학을 구성할 수 있었기 때문이다. 이와 같은 비유클리드기하학을 로바쳅스키-보요이 기하학과 리만 기하학이라고 각각 부른다. 19C말 수학에는 수학의 역사상 가장 위대한 일이 일어나는데 그것은 칸도르에 의해 집합론이 제안된 것이다. 오늘날 수학은 이 집합론에 의해 전개된다고 해도 과언이 아니다. 어떤 사람은 수학을 과학의 에스페란토어라고 했는데 집합론은 그 수학의 언어의 샘이니, 과학의 가장 기초적인 언어라 할 수 있다. 그런데 칸토르의 작업이 수학사상 가장 높은 봉우리의 하나라고 하는 것은 무한을 적극적으로 다룬 때문이라 할 수 있다. 끝이 없

이 가는 것이라는 아리스토텔레스 이래 '가능한 무한'에 머물렀던 무한을 칸토르는 완결된 '현실적 무한'으로 취급했다는 점에서 획기적인 전환점을 만들게 된다. 20C에 들어와서 많은 수학자들은 기초론적 논의를 통해 수학을 모순이 없는 체계 위에 건설할 수 있음을 보이려고 노력했으나 괴델에 의해 이러한 체계가 불완전함이 밝혀졌다. 소위 괴텔의 불완전성 정리라고 불리우는 이것은 인간이성의 승리이자 패배였다.

수학은 수와 양을 다루는 학문이라고 하기도 하고 관계와 구조를 다룬다고도 한다. 모두 수학의 특성을 잘 나타낸 정의라고 생각한다. 수학이 일반적으로 눈에 보이는 어떤 실재들은 탐구 대상으로 하지는 않으나 존재와 현상의 관계와 구조를 드러내는 모델을 제시하는, 인간이 가진 가장 효율적인 도구이기에 수학은 모든 학문의 '언어'로 사용되고 있다. 필자는 신학에 무지하지만 신학이 학문으로서 체계를 가지고 있는 한 어떤 관계와 구조를 언급하지 않을 수 없다고 본다. 여기서 수학과 신학은 접촉점을 가지고 수학은 신학이 이해하고 설명하려는 것에 기여할 기회를 갖게 된다.

처음 신앙을 가지게 된 사람으로부터 연륜이 쌓인 신자에 이르기까지 삼위일체론과 인간의 자유의지와 하나님의 절대주권 등에 관련된 질문을 한 번쯤 던지게 된다. 의문을 가진 사람은 신학 서적을 뒤적이거나 주변의 도움을 구해 보지만 전문성이 요구되고 대체로 변증보다는 믿음을 강조함을 알게 된다. 이런 현실은 문제의 성격상 당연하다고 생각된다. 그러나 학문의 영역에서 이 문제를 다루게 되면 입장은 달라진다. 왜냐하면 학문은 변증이 가능하면 어떻게 가능한지 그렇지 않다면 왜 변증에 한계가 있는지, 왜 믿음으로 받아들여야 하는지를 적어도 체계를 갖추어 설명해야 하기 때문이다. 본고는 이러한 문제를 직접적이고 상세하게 접근하기 보다는 수학이라는 '간접적인' 우회로를 통해서 도달하려고 한다. 아니 목표에 도달하기 보다는 이 문제를 멀리서 조망한다는 편이 정확할 것이다. 이 우회로에는 무한이라는 '봉우리'와 불완전성 정리라는 '다리'를 건너게 된다. 이 봉우리와 다리를 건너며 안개에 싸인 '직행로'를 바라보게 된다.

즉 본고는 무한과 불완전성 논의의 신학적 함축을 개괄하려 한다.

2. 무한 - 그 역사와 수학적 성질

무한이란 말은 헬라어로 아페이론(apeiron)이라고 하는데 이 말은 '아' 라는 부정을 나타내는 접두사와 '페라스(peras)' 즉 끝, 한계를 의미하는 말의 합성어이다. 그리이스 사람들은 무한은 부족함과 완전치 않음을 나타낸다고 생각했던 것 같다. 그래서 피타고라스는 '페라스'가 '아페이론' 을 한정함으로써 질서가 생긴다고 했고 이러한 생각은 플라톤의 이데아론과 아리스토텔레스의 '형상'이 '질료'를 한정할 때 개체가 성립한다는 사상으로 발전해 갔다. 그리이스에서는 무한이 적극적으로 수학의 대상이 될 수 없었다. 그리이스의 무한관을 최종적으로 정리한 아리스토텔레스의 무한은 현실적이거나 완결된 것이 아니라 '가능적'으로 존재하는 것이다. 그렇다고 해서 그리이스 사상가 전체가 무한을 유한에 비해 '열등'한 것으로 취급한 것은 아니었다. A.D. 1세기에 무한은 처음으로 필론(Philon)에 의해서 신의 속성으로 취급되었고 그후 플로티누스(Plotinus)에 이르러서는 무한은 일체의 만물이 유출되는 근원으로서 해석되어 중세의 무한관에 영향을 주게 된다. 중세에 들어서서는 무한은 더욱 적극적으로 해석된다. 신의 속성으로 이해된 무한은 그리이스와는 반대로 '유한이상의 것'이 되었으며 더욱더 가치있는 것으로 격상되었다. 중세의 무한관은 에리우게나(Eriugena)와 마그누스(Magnus), 토마스 아퀴나스 등을 거치면서 무한의 초월성을 인정하면서도 인간의 합리적 인식안으로 내재화하려는 경향을 보였다. 무한을 적극적으로 인식의 대상화하고 논리화함으로써 '현실적 무한'을 다루기 시작한 것이다. 그리이스시대의 아리스토텔레스의 무한은 가능적 무한(potential infinity)이다. 이것은 자연수의 열과 같이 1, 2, 3, ... 한없이 계속 나아가지만 지나온 과정은 항상 유한이고 '최종적인 무한'에는 도달할 수 없는, 언제까지나 계속 나아가는 그러한 무한이다. 이에 반해 '현실적 무한(actual infinity)'은 완성된 형태의 무한이요 현실적 존재

인 무한이다.

중세의 무한관의 형성에는 쿠자누스(Cusanus)의 공헌이 크다. 그의 무한론은 신학과 결부되어 있었다. '무한자' 로서의 신보다 더 큰 것도 더 작은 것도 있을 수 없기 때문에 신은 무한대인 동시에 무한소인 '반대의 일치' 가 이루어진다. 쿠자누스의 무한에 관한 논리는 무한이 유한의 단순한 연장이 아니라 원주와 직선이 일치하고, 전체와 부분이 같아지는 '대립의 일치' 가 가능한 구조를 갖는 것이었다. 이러한 무한관은 형이상학적이고 수학적으로는 잘 다듬어지지 않은 것이었으나 근대 수학을 탄생시키는데 큰 기여를 하게 된다. 쿠자누스의 무한관은 갈릴레이에 오면 더 구체화 된다. 그는 유한에서의 개념이 무한에서 그대로 통용되지 않는다는 것을 자연수와 그것들의 제곱을 대응시킴으로 보였다. 즉

1	2	3	4	5	6	. . .
?	?	?	?	?	?	
1	4	9	16	25	36	. . .

제곱수는 분명 자연수에 포함되지만 하나의 자연수에 대하여 반드시 하나의 제곱수가 일대일 대응한다는 것은 자연수 전체의 개수와 제곱수 전체의 개수가 같다는 것을 의미한다. 이것은 전체와 부분이 같다는 소위 '무한의 역리' 를 만들고 그리이스이래 수학에서 가장 표준적인 권위를 가지고 있던 유클리드의 『원론』에 있는 공리인 '전체는 부분보다 크다' 는 것과 모순되기 때문에 당혹스러운 일이었을 것이다. 유한에서 성립하는 것을 무리하게 무한의 세계에 연장하여 적용하려 한다면 '역리' 가 생긴다는 것이 갈릴레이의 통찰이었다. 그러나 갈릴레이도 이 현실적인 무한을 체계적으로 정리하지는 못하고 수학적으로 어느 정도 다듬어진 현실적 무한론이 나오게 된 것은 19C말 칸토르의 집합론에서이다.

칸도르는 중세 이후 적극적으로 다루어 온 '현실적 무한'을 수학적으로 다루는 집합론을 제창했다. 집합론은 자연수 전체라든가 어떤 직선 위의 점 전체와 같이 무한한 것 전체를 완결된 하나의 집합으로서 파악하려고 한다. 무한을 수로 만들고 수로 취급하기 위해서 개수(cardinality)라는 개념을 도입한다. 두집합의 개수는 두 집합에 속한 각각의 원소가 서로 대응하는지를 살펴봄으로써 비교된다. 예컨대 두 집합 A와 B가 있다고 할 때 A의 원소와 B의 원소가 일대일 대응할 때 두집합의 개수는 같다고 하고 만일 A가 B의 진부분집합과 일대일 대응한다면 A의 개수는 B의 개수보다 작게 된다. 칸도르는 이 개수의 개념을 통하여 여러 종류의 무한을 구별했고 직관적으로 다른 종류의 무한이라고 여겨지던 자연수의 집합과 유리수의 집합은 같은 개수를 가지고 실수집합의 개수는 이것들보다 크다는 것을 밝혔다. 즉 실수의 집합은 유리수나 자연수의 집합보다 크다는 것이다. 무한에는 자연수의 집합처럼 셀 수 있는 것과 셀 수 없는 실수의 집합 같은 것으로 나누어 볼 수 있다. 무한집합은 반드시 셀 수 있는 부분집합을 가지며 무한 부분집합을 가지는 모든 집합은 무한하다. 반면에 유한집합의 모든 부분집합은 유한하다. 무한집합을 특징짓는 가장 알려진 성질은 하나의 무한집합은 그것의 진부분 집합과 일대일 대응이 될 수 있다는 것이다. 덧셈과 곱셈의 연산도 유한한 경우와는 다른 공식이 성립한다. 만일 a를 무한개수(infinite cardinal number)라고 하면 $a+a=a$ 이고 $aa=a$ 가 된다. 물론 a가 유한한 수라면 $a+a=2a$ 가 되고 $aa=a^2$이다.[1] 한 단계 더 나아가 a가 무한개수일 때 $a+a+a$는 처음 두항의 합이 a가 되므로 $a+a$가 되어 결과는 $a+a+a=a$이고, 마찬가지로 곱셈의 경우도 $aaa=a$가 된다. 무한에서 일어나는 이러한 결과들은 삼위일체론의 일면을 하나의 수학적 모델화 하는데 있어서 고무적인 일로 보인다. 만족스럽지는 않지만 우리에게 가장 친숙한 자연수의 집합(N)을 가지고도 시도해 볼 수 있다. 자연수를 3으로 나누어 남는 나머지는 0, 1, 2 세 가지 경우 인데 이것들은 다음과 같은 집합 N_1, N_2, N_3으로 각각 나타낼 수 있다.

---

1) Pinter, Charles C., Set Theory, Addison-Wesley Company Inc., 1971, PP159-161

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$N_1 = \{1, 4, 7, \ldots\}$$

$$N_2 = \{2, 5, 8, \ldots\}$$

$$N_3 = \{3, 6, 9, \ldots\}$$

이때 N은 집합 N_1, N_2, N_3가 모여서 된 전체집합이지만 -- $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ -- 이 네 집합들의 개수는 모두 서로 같다. 즉 어떤 수 a의 개수를 $|a|$로 나타낸다면

$$|N| = |N_1| = |N_2| = |N_3|$$

가 된다.

3. 불완전성 정리 - 인간 이성의 승리이며 패배?

1931년 오스트리아의 수학자 괴델(Gödel)은 「수학과 물리학을 위한 월간지」에 '수학적 원리 및 그와 연관된 체계들의 형식적으로 결정할 수 없는 명제들에 대하여' 라는 논문을 발표했다. 소위 '불완전성 정리' 라 불리우는 이 논문은 당시에 큰 주목을 끌지는 못했으나 몇년후 수학과 논리학에 있어서 금세기 최고의 업적의 하나로 인정받게 된다. 이 논문의 파장은 컸다. 왜냐하면 이 논문은 수학에 있어서 모든 중요한 분야들을 완전히 공리화 할 수 있다는 강력한 믿음을 뒤엎었고 수학의 내적 무모순성을 증명하려는 희망을 좌절시켰기 때문이다. 19C말과 20C초에 집합론 위에 수학을 건축하려는 작업은 역리의 발생으로 위기에 봉착했었다. 즉, 수학의 기초가 흔들리게 된 것이다. 이 흔들리는 기초를 고정시키려고 세 가지 주요

한 방법이 제안되었다. 프레게와 러셀을 중심으로 한 논리주의와 브라우어의 직관주의, 그리고 힐버트의 형식주의이다. 이중 논리주의는 일찍 실패로 판명 났으며, 직관주의는 대부분 수학자들로부터 외면 당했다. 브라우어는 수학적 대상은 자연수에서 출발하여 유한 번의 단계 내에 구성되어야 함을 주장했고 배중률의 무제한 사용을 거부했다. 힐버트는 브라우어의 비판으로부터 수학을 방어하려고 유한하고 조합적인 형태의 논법으로 수학의 무모순성을 증명하려고 했는데 이러한 계획이 바로 괴델에 의해 달성될 수 없다고 밝혀진 것이다.

형식화된 공리론적 체계에 모순이 없다는 증명이 불가능하다는 것은 엄밀하고 정확한 학문의 전형인 수학에도 한계가 있다는 것을 드러낸 것이고 비단 수학뿐 아니라 철학과 지식 일반에 대한 재검토를 요청하는 계기가 되었다고 할 수 있다.

괴델이 보여준 불완전성 정리(Incompleteness Theorem)는 다음과 같다.

제 1 불완전성 정리

자연수 체계를 포함하는 무모순인 임의의 형식 체계 F에 대해서, F안에는 결정 불가능한 명제들이 존재한다.

제 2 불완전성 정리

자연수 체계를 포함하는 임의의 무모순인 형식 체계 F에 대해서, F의 무모순성을 F안에서는 증명할 수 없다.[1)]

괴델의 제1불완전성정리는 무모순인 어떠한 공준집합을 택하더라도 문장 P와 ~P(P의 부정)을 증명할 수 없는 문장 P가 존재함을 말하고 있고, 제2불완전성정리는 어떤 무모순한 형식 체계는 그 자신의 무모순성을 증

1) Eves, Howard, 수학의 위대한 순간들, 허민, 오혜영역, 경문사, 1994, PP. 514 -516

명할 수 없다는 것이다. 그런데 이 정리를 증명하는 괴델의 방법은 매우 독특하고 획기적인 것이었는데 그것은 다음과 같은 단계로 요약될 수 있다.

첫째, 논리식이나 그 증명을 형식화하여 이것들을 각각 하나의 기호열로 나타낸다.

둘째, 각 기호열에 하나의 자연수(Gödel number)를 대응시킨다. 이것은 소수를 크기순으로 밑(base)으로 하고 정해진 수를 지수에 배치함으로써 얻어진다.

셋째, '괴델수 P를 갖는 논리식은 증명할 수 없다' 라는 문장의 괴델수를 P로하는 자기지시적 문장을 만든다.

괴델은 이와 같은 자기지시적 문장을 통해 자기자신의 참, 거짓을 결정할 수 있는 형식체계는 존재할 수 없음을 증명했다. 이 정리가 함축하는 바는 여러 각도에서 조명될 수 있으나 적어도 진리의 세계는 증명의 세계보다 크다는 것을 보였다고 할 수 있다. 즉 증명할 수 없는 진리의 세계가 존재한다는 것을 입증했다고 할 수 있다.

4. 맺는말

수학과 신학은 추상적인 관계와 구조를 언급해야 한다는 점에서 비슷한 입장에 있다고 할 수 있다. 따라서 수학의 한 이론이나 그것의 정리들은 신학의 문제들을 접근하는 데 있어서 좋은 길잡이 역할을 할 수 있다. 삼위일체론과 예정론과 같은 설명의 어려움을 겪는 문제의 경우 물론 만족스럽지는 않지만 수학적 모델이나 유비를 통해 보다 효과적인 설명력을 가질 수 있다고 본다. 전술한 바와 같이 a가 무한개 수일 때 a+a+a=a, aaa=a가 성립되고, 유한을 단순히 연장해서는 납득하기 어려운 현상 - 전체와 부분의 개수가 같아지는 현상 - 이 일어남을 보였다. 수학에서 취

급하는 무한의 세계에서 일어나는 이러한 상식을 초월하는 결과들은 일반적으로 양적인 무한을 그 대상으로 했을 때이다. 그러나 조직신학에서 하나님의 무한성을 이야기 할 때 비공유 속성으로서 양적인 것이 아니라 질적인 무한이다.[1] 하나님의 무한성은 하나님이 모든 제한으로부터 자유하시다는 것을 나타내며, 하나님의 절대적 완전성과 시간과 관련된 영원성 그리고 공간적 광대성으로 다양한 측면들로 구분된다.[2]

불가지론에 빠지는 것은 경계해야 하지만 인간이 단순히 수적인 무한을 이해하는데 있어서도 유한에서 통용되는 상식과 직관을 뛰어넘어야 한다면 하나님의 속성을 이해하려는 모든 시도가 한계와 제한이 따를 수밖에 없다는 것은 당연한 일이다. 더구나 조직신학에서 무한을 접근하는 방식도 하나님 속성의 일부만을 학문적 편의상 취한 것일 것이므로, 무한성을 포함하는 하나님의 속성이해에는 본질적 한계가 있다는 분명한 인식하에 성경이 말씀하시는 바에 겸허히 귀를 기울여야 한다고 생각한다.

하나님의 절대주권과 인간의 자유의지라는 상반되게 보이는 두 주제에 대해서 논리적으로 양립할 수 없다는 비판도 매우 위험하고 단순한 지적이다. 논리적으로 양립할 수 없다고 할 때의 그 논리적이란 무엇이며 절대적 근거가 되는가? 인간이 논리적으로 증명할 수 없다는 것은 모두 거부되어야 하는가? 괴델의 불완전성정리는 이러한 물음들에 대해 통찰력을 제공하고 이성만능주의내지 논리지상주의에 한계를 지적한다. 그리고 오늘날 아리스토텔레스의 전통논리와 고전논리 이외에 많은 다양한 논리 - 확장논리, 양상논리, 시제논리, 명령논리, 다치논리 등 - 가 필요와 상황에 적절하게 제시되고 있다. 하나님의 속성과 역사를 이해하는 논리는 '성경논리' 이다. 신학자의 작업은 이 '성경논리' 를 매우 체계적이고 일관성있게 드러내는 것일 것이며 이 과정에서 수학은 주어진 가능성을 점검하고 패턴과 구조를 설명하는데 신학과 관계를 맺을 것이다. □

1) Bavinck, Herman, 개혁주의 신론, 이승구역, 기독교 문서 선교회, 1988, p. 224.
2) Berjhof, Louis, 조직신학, 권수경.이상원 옮김, 크리스찬 다이제스트, 1991, pp. 253 - 255.

참고서적

1. Bavinck, Herman, 개혁주의 신론, 이승구역, 기독교 문서 선교회, 1988.
2. Berkhof, Louis, 조직신학, 권수경, 이상원 옮김, 크리스챤 다이제스트, 1991.
3. Davis, P. and Hersh, R., The Mathematical Experience, Birkhäuser Boston, 1981.
4. Eves, Howard, 수학의 위대한 순간들, 허민. 오혜영 옮김, 경문사, 1994.
5. Maor, Eli, To Infinity and Beyond, Birkhäuser Boston, 1987.
6. Nagel, E. and Newman, J., Gödel' s Proof, New York University Press, 1958.
7. Pinter, Charles, Set Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.